BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2007**

О РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ВЕКТОР – ФУНКЦИЙ

Э.Г.ГАМИДОВ
Бакинский Государственный Университет

В работе получены условия разрешимости операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка на всей оси в пространстве гладких вектор-функций. При этом получены оценки нормы операторов промежуточных производных в пространствах гладких вектор- функций. Все условия выражены коэффициентами операторно-дифференциальных уравнений.

В этой работе будем исследовать разрешимость операторно-дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в пространствах гладких вектор - функций, определенных на всей оси.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A - самосопряженный положительно - определенный оператор в H, а при $\gamma \ge 0$ $\mathrm{H}_\gamma = D(A^\gamma), (x,y)_\gamma = (A^\alpha x, A^\alpha y)$, считаем, что $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}$.

Через $L_2(R;H)$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$, определённых в $R=(-\infty,\infty)$ со значениями из H, которые имеют конечную норму $\|f\|_{L_2(R:H)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$.

Введём гильбертово пространство для натуральных m $[1]$

$$W_2^m(R:H) = \left\{u : u^{(m)}(t) \in L_2(R:H), A^m u \in L_2(R:H)\right\}$$

с нормой

$$u_{W_2^m(R:H_m)} = \left(\left\|u^{(m)}\right\|^2_{L_2(R:H)} + \left\|A^m u\right\|^2_{L_2(R:H)}\right)^{1/2},$$

здесь все производные понимаются в смысле обобщённых функций $[1]$.

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение

$$P(d/dt)u(t) = -u''(t) + A^2 u(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) = f(t), \quad t \in R \qquad (1)$$

где $f(t)\in W_2^1(R;H_1)$-заданная функция, $u(t)\in W_2^3(R;H_3)$-искомая вектор-функция, а A_1 и A_2-линейные операторы в H.

Пусть $L(X;Y)$ – пространство непрерывных операторов, действующих из пространства X в пространство Y. Далее, обозначим:

$$P_0(d/dt)u \equiv -u'' + A^2 u, \quad u \in W_2^3(R;H_3), \tag{2}$$

$$P_1(d/dt)u = A_1 \frac{du}{dt} + A_2 u, \quad u \in W_2^3(R;H_3). \tag{3}$$

Определение 1. Пусть вектор-функция $u(t)\in W_2^3(R;H_3)$ удовлетворяет уравнению (1) тождественно в R. Тогда её будем называть гладким решением уравнения (1) из пространства $W_2^3(R;H_3)$.

Аналогичные задачи рассмотрены, например, в [2].

Имеет место

Теорема 1. Пусть A–положительно-определенный самосопряженный оператор, $A_1 \in L(H_2;H_1)\cap L(H_1;H)$, $A_2 \in L(H_3;H_1)\cap L(H_2;H)$
и имеет место неравенство

$$\alpha = \frac{1}{2}\max\left\{\|A_1\|_{H_1\to H}, \|A_1\|_{H_2\to H_1}\right\} + \max\left\{\|A_2\|_{H_2\to H}, \|A_2\|_{H_3\to H_1}\right\} < 1.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное гладкое решение из пространства $W_2^3(R;H_3)$.

Доказательство. Сперва рассмотрим уравнение

$$P_0(d/dt)u \equiv -u'' + A^2 u = f(t), \quad t \in R$$

Тогда, обозначив через

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) e^{-i\xi t} d\xi,$$

где

$$\hat{u}(\xi) = P_0^{-1}(-i\xi;A)\hat{f}(\xi),$$

а

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\xi t} dt,$$

покажем, что $u(t)\in W_2^3(R;H_3)$.

Действительно, по теореме Планшареля имеем:

$$\|u\|^2_{W_2^3(R;H_3)}=\|u'''\|^2_{L_2(R;H)}+\left\|A^3u\right\|^2_{L_2(R;H)}=\left\|\xi^3\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L_2}+$$

$$+\left\|A^3\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)}=\left\|\xi^3P_0^{-1}(-i\xi;A)\hat{f}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)}+\left\|A^3P_0^{-1}(-i\xi;A)\hat{f}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)}\le$$

$$\le\sup_{\xi\in R}\left\|\xi^2P_0^{-1}(-i\xi;A)\right\|_{H\to H}\cdot\left\|\xi\cdot\hat{f}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)}+\sup_{\xi\in R}\left\|A^2P_0^{-1}(-i\xi;A)\right\|_{H\to H}\cdot\left\|A\hat{f}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)}.$$

Так как по спектральному разложению оператора A,

$$\left\|\xi^2P_0^{-1}(-i\xi;A)\right\|_{H\to H}=\sup_{\mu>\mu_0>0}\left\|\xi^2\left(\xi^2+\mu^2\right)^{-1}\right\|\le1$$

и

$$\left\|A^2P_0^{-1}(-i\xi;A)\right\|_{H\to H}=\sup_{\mu>\mu_0>0}\left\|\mu^2\left(\xi^2+\mu^2\right)^{-1}\right\|\le1,$$

то имеет место оценка

$$\|u\|^2_{W_2^3(R;H_3)}\le\left\|\xi\hat{f}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)}+\left\|A\hat{f}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)}=\|f'\|^2_{L_2(R;H)}+\|Af\|^2_{L_2(R;H)}=\|f\|^2_{W_2^1(R;H_1)}.$$

Следовательно, $u(t)\in W_2^3(R;H_3)$ и имеет место неравенство

$$\|u\|^2_{W_2^3(R;H_3)}\le\|f\|^2_{W_2^1(R;H_1)}.$$

Очевидно, что $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2) тождественно. С другой стороны, однородное уравнение $P_0u=0$ имеет только нулевое решение из $W_2^3(R;H_3)$. Тогда, по теореме Банаха об обратном операторе, существует ограниченный обратный оператор P_0^{-1}. Таким образом, норма $\|P_0u\|_{W_2^1(R;H_1)}$ эквивалентна норме $\|u\|_{W_2^3(R;H_3)}$.

Из теоремы о промежуточных производных вытекает, что конечны следующие числа:

$$M_1(R)=\sup_{0\ne u\in W_2^3(R;H_3)}\|Au'\|_{W_2^1(R;H_1)}\cdot\|u\|^{-1}_{W_2^3(R;H_3)}\tag{4}$$

и

$$M_0(R)=\sup_{0\ne u\in W_2^3(R;H_3)}\left\|A^2u\right\|_{W_2^1(R;H_1)}\|u\|^{-1}_{W_2^3(R;H_3)}.\tag{5}$$

Для доказательства теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Нормы $M_1(R)$ и $M_0(R)$, определенные равенствами (4) и (5), равны следующим числам:

$$M_1(R)=\frac{1}{2}; \quad M_0(R)=1.$$

Здесь мы используем методику работы $[2]$.

Доказательство. Рассмотрим полиномиальный пучок:

$$P(\lambda;\beta;A)=\left((i\lambda)^2+A^2\right)\left((i\lambda)^4E+2(i\lambda)^2A^2+A^4\right)-\beta\left((i\lambda)^4A^2+(i\lambda)^2A^4\right).$$

Покажем, что при $\lambda=i\xi$, $\xi\in R$ и $\beta\in(0,4)$ пучок $P(i\xi;\beta;A)>0$.

Действительно, при $\mu\in\sigma(A)$, $\mu>\mu_0$

$$\begin{aligned}
P(i\xi;\beta;\mu)&=\left(\xi^2+\mu^2\right)\left(\xi^4+2\xi^2\mu^2+\mu^4\right)-\beta\left(\xi^4\mu^2+\xi^2\mu^4\right)=\\
&=\left(\xi^2+\mu^2\right)\left(\xi^4+2\xi^2\mu^2+\mu^4\right)\left[1-\beta\frac{\xi^2\mu^2}{\xi^4+2\xi^2\mu^2+\mu^4}\right]>\\
&>\left(\xi^2+\mu^2\right)^3\left[1-\beta\sup_{\xi,\mu}\frac{\xi^2\mu^2}{\left(\xi^2+\mu^2\right)^2}\right]=\left(\xi^2+\mu^2\right)^3\left(1-\frac{\beta}{4}\right)>0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$P(\lambda;\beta;\mu)=\mu^6P\left(\frac{\lambda}{\mu};\beta;1\right),$$

где

$$\begin{aligned}
P(\lambda;\beta;1)&=\left((i\lambda)^2+1\right)\left(\left((i\lambda)^2+1\right)^2-\beta(i\lambda)^2\right)=\\
&=\left((i\lambda)^2+1\right)\left(\lambda^2+\lambda\sqrt{4-\beta}+1\right)\left(\lambda^2-\lambda\sqrt{4-\beta}+1\right)=\\
&=\left[(\lambda+1)\left(\lambda^2+\lambda\sqrt{4-\beta}+1\right)\right]\left[(-\lambda+1)\left(\lambda^2-\lambda\sqrt{4-\beta}+1\right)\right].
\end{aligned}$$

Так как при $\beta\in(0,4)$ полином

$$\Phi(\lambda;\beta;1)=(\lambda+1)\left(\lambda^2+\lambda\sqrt{4-\beta}+1\right)$$

имеет корни из левой полуплоскости:

$$\omega_1=-1, \omega_2=-\frac{\sqrt{4-\beta}}{2}+\frac{i\beta}{2}; \quad \beta\in(0,4), \quad \omega_3=-\frac{\sqrt{4-\beta}}{2}-\frac{i\beta}{2}; \quad \beta\in(0,4),$$

то $\Phi(\lambda;\beta;1)$ имеет вид

$$\Phi(\lambda;\beta;1)=\lambda^3+\alpha_2(\beta)\lambda^2+\alpha_1(\beta)\lambda+1,$$

где $\alpha_1(\beta)=1+\sqrt{4-\beta}$, $\alpha_2(\beta)=1+\sqrt{4-\beta}$.

Используя полином $\Phi(\lambda;\beta;1)$, построим полином

$$\Phi(\lambda;\beta;\mu)=\lambda^3+\alpha_2(\beta)\lambda^2\mu+\alpha_1(\beta)\lambda\mu^2+\mu^3$$

и полиномиальный операторный пучок

$$\Phi(\lambda;\beta;A)=\lambda^3E+\alpha_2(\beta)\lambda^2A+\alpha_1(\beta)\lambda A^2+A^3,$$

где

$$\alpha_1(\beta)=1+\sqrt{4-\beta}\,,\quad \alpha_2(\beta)=1+\sqrt{4-\beta}\ .$$

Легко проверяется, что при любом $\beta\in(0,4)$ и $u(t)\in W_2^3(R;H_3)$ имеет место равенство

$$\left\|\Phi(d/dt;\beta;A)u\right\|^2_{L_2(R;H)}=\left\|u\right\|^2_{W_2^3((a;b);H_3)}-\beta\left\|Au'\right\|^2_{W_2^1((a;b);H_1)}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что при любом $\beta\in(0,4)$ и $u\in W_2^3(R;H_3)$ имеет место неравенство

$$\left\|u\right\|^2_{W_2^3(R;H_3)}\geq\beta\left\|Au'\right\|^2_{W_2^1(R;H\cdot)}.$$

Переходя к пределу при $\beta\to 4$, для любого $u\in W_2^3(R;H_3)$ получаем неравенство

$$4\left\|Au'\right\|^2_{W_2^1(R;H_1)}\ \leq\left\|u\right\|^2_{W_2^3(R;H_3)},$$

т.е.

$$\left\|Au'\right\|_{W_2^1(R;H_1)}\ \leq\frac{1}{2}\left\|u\right\|_{W_2^3(R;H_3)},$$

следовательно, $M_1(R)\leq\frac{1}{2}$. Покажем, что имеет место точное равенство $M_1(R)=\frac{1}{2}$.

С этой целью, рассмотрим для заданного $\varepsilon>0$ функционал

$$E(u)=\left\|u\right\|^2_{W_2^3(R;H_3)}-(4+\varepsilon)\left\|Au'\right\|^2_{W_2^1(R;H_1)}$$

и покажем, что существует вектор-функция $u_\varepsilon(t)\in W_2^3(R;H_3)$, для которой имеет место неравенство $E(u_\varepsilon)<\varepsilon$. Тогда по определению имеем:

$$\begin{aligned}E(u)&=\left\|u\right\|^2_{W_2^3(R;H_3)}-(4+\varepsilon)\left\|Au'\right\|^2_{W_2^1(R;H_1)}=\left\|P_0(d/dt)u\right\|^2_{W_2^1(R;H_1)}-(4+\varepsilon)\left\|Au'\right\|^2_{W_2^1(R;H_1)}=\\&=\left\|A\left(-u''+A^2u\right)\right\|^2_{L_2(R;H)}+\left\|-u'''+A^2u'\right\|^2_{L_2(R;H)}-(4+\varepsilon)\left\|Au'\right\|^2_{W_2^1(R;H_1)}=\left\|Au''\right\|^2_{L_2(R;H)}+\\&+\left\|A^3u\right\|^2_{L_2(R;H)}-2\operatorname{Re}\left(Au'',A^3u\right)_{L_2(R;H)}+\left\|u'''\right\|^2_{L_2(R;H)}+\left\|A^2u'\right\|^2_{L_2(R;H)}-\\&-2\operatorname{Re}\left(u''',A^2u'\right)_{L_2(R;H)}-(4+\varepsilon)\left(\left\|A^2u'\right\|^2_{L_2(R;H)}+\left\|Au''\right\|^2_{L_2(R;H)}\right)\end{aligned}$$

Поскольку

$$-2\operatorname{Re}\left(Au'',A^3u\right)_{L_2(R;H)}=2\left\|A^2u'\right\|^2_{L_2(R;H)}$$

и

$$-2\operatorname{Re}\left(u''', A^2u'\right)_{L_2(R;H)} = 2\left\|Au''\right\|^2_{L_2(R;H)},$$

то

$$E(u) = \left\|u'''\right\|^2_{L_2(R;H)} + \left\|A^3u\right\|^2_{L_2(R;H)} + 3\left\|A^2u'\right\|^2_{L_2(R;H)} + 3\left\|Au''\right\|^2_{L_2(R;H)} -$$
$$-(4+\varepsilon)\left(\left\|A^2u'\right\|^2_{L_2(R;H)} + \left\|Au''\right\|^2_{L_2(R;H)}\right).$$

Далее, считая, что $u = g(t)\varphi$, где $g(t) \in W_2^3(R)$, $\varphi \in H_6$, и используя теорему Планшереля, имеем:

$$E(u) = \left\|\xi^3\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)} + \left\|A^3\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)} + 3\left\|\xi A^2\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)} + 3\left\|\xi^2 A\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)} -$$
$$-(4+\varepsilon)\left(\left\|\xi A^2\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)} + \left\|\xi^2 A\hat{u}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)}\right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\xi^2E + A^2\right)\left[\left(\xi^4E + 2\xi^2A^2 + A^4\right) - (4+\varepsilon)\xi^2A^2\right]\varphi, \varphi\right)\left\|\hat{g}(\xi)\right\|^2 d\xi.$$

Теперь, действуя как в работе $[2]$, можем найти такие $\varphi \in H_6$ и $g_\varepsilon(t)$, что $E(g_\varepsilon(t)\varphi) < \varepsilon$.

Таким образом, $M_1(R) = 1/2$.

Теперь докажем, что $M_0(R) = 1$. С этой целью, рассмотрим полиномиальный операторный пучок при $\beta \in (0,1)$:

$$T(\lambda;\beta;A) = \lambda^3E + \tilde{\alpha}_{2,0}(\beta)\lambda^2A + \tilde{\alpha}_{1,0}(\beta)\lambda A + \tilde{\alpha}_{0,0}(\beta)A^3, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha}_{0,0}(\beta) = \sqrt{1-\beta}, \\ &\tilde{\alpha}_{1,0}(\beta) = \sqrt{1-\beta} + \sqrt{2\left(1+\sqrt{1-\beta}\right)}, \\ &\tilde{\alpha}_{2,0}(\beta) = 1 + 2\sqrt{1+\sqrt{1-\beta}} \end{aligned} \tag{8}$$

и, действуя как в предыдущем случае, легко получаем, что для любого $u \in W_2^2(R;H_3)$ имеет место равенство

$$\left\|T(d/dt;\beta;A)u\right\|_{L_2(R;H)} \equiv \left\|u\right\|^2_{W_2^3(R;H_3)} - \beta\left\|A^2u\right\|^2_{W_2^1(R;H_1)}.$$

Отсюда имеем:

$$\left\|u\right\|^2_{W_2^3(R;H_3)} - \beta\left\|A^2u\right\|^2_{W_2^1(R;H_1)} \geq 0$$

при всех $\beta \in (0,1)$ и $u \in W_2^3(R;H_3)$. Переходя к пределу при $\beta \to 1$, получаем, что

$$\left\|A^2 u\right\|_{W_2^1(R;H_1)}^2 \le \|u\|_{W_2^3(R;H_3)}^2,$$

т.е. $M_0(R) \le 1$. Аналогично предыдущему случаю, доказывается, что $M_0(R)=1$. Лемма доказана.

Теперь продолжим доказательство теоремы. Так как оператор

$$P_0(d/dt;A)\colon W_2^3(R;H_3) \to W_2^1(R;H_1)$$

изоморфизм, то существует ограниченный обратный оператор

$$P_0^{-1}: W_2^1(R;H_1) \to W_2^3(R;H_3).$$

Теперь напишем уравнение $P(d/dt)u \equiv f$ в виде

$$P_0 u + P_1 u = f,$$

где

$$P_1 u = A_1 \frac{du}{dt} + A_2 u, \quad u \in W_2^3(R;H_3)$$

Обозначив $P_0 u = \vartheta$, получаем уравнение

$$\vartheta + P_1 P_0^{-1} \vartheta = f$$

в пространстве $W_2^1(R;H_1)$. Теперь оценим норму $\left\|P_1 P_0^{-1}\right\|_{W_2^1 \to W_2^1}$:

$$\begin{aligned}
&\left\|P_1 P_0^{-1}\vartheta\right\|_{W_2^1(R;H_1)} = \|P_1 u\|_{W_2^1(R;H_1)} = \|A_1 u' + A_2 u\|_{W_2^1(R;H_1)} \le \|A_1 u'\|_{W_2^1(R;H_1)} + \|A_2 u\|_{W_2^1(R;H_1)} = \\
&= \left(\|A_1 u''\|_{L_2(R;H)}^2 + \|AA_1 u'\|_{L_2(R;H)}^2\right)^{1/2} + \left(\|A_2 u'\|_{L_2(R;H)}^2 + \|AA_2 u\|_{L_2(R;H)}^2\right)^{1/2} \le \\
&\le \left(\left\|A_1 A^{-1}\right\|^2 \|A u''\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\|AA_1 A^{-2}\right\|^2 \left\|A^2 u'\right\|_{L_2(R;H)}^2\right)^{1/2} + \\
&+ \left(\left\|A_2 A^{-2}\right\|^2 \left\|A^2 u'\right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\|AA_2 A^{-3}\right\|^2 \left\|A^3 u\right\|_{L_2(R;H)}^2\right)^{1/2} \le \\
&\le \max\left(\left\|A_1 A^{-1}\right\|_{H\to H}, \left\|AA_1 A^{-2}\right\|_{H\to H}\right)\left(\|Au''\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\|A^2 u'\right\|_{L_2(R;H)}^2\right)^{1/2} + \\
&+ \max\left(\left\|A_2 A^{-2}\right\|_{H\to H}, \left\|AA_2 A^{-3}\right\|_{H\to H}\right)\left(\left\|A^2 u'\right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\|A^3 u\right\|_{L_2(R;H)}^2\right)^{1/2} = \\
&= \max\left(\|A_1\|_{H_1\to H}, \|A_1\|_{H_2\to H_1}\right)\|Au'\|_{W_2^1(R;H_1)}^2 + \max\left(\|A_2\|_{H_2\to H}, \|A_2\|_{H_3\to H_1}\right)\left\|A^2 u\right\|_{W_2^1(R;H)} \le \\
&\le \max\left(\|A_1\|_{H_1\to H}, \|A_1\|_{H_2\to H_1}\right) M_1(R)\|u\|_{W_2^3(R;H_3)} + \max\left(\|A_2\|_{H_2\to H}, \|A_2\|_{H_3\to H_1}\right) M_0(R)\|u\|_{W_2^3(R;H_3)} = \\
&= \alpha\|u\|_{W_2^3(R;H_3)} = \alpha\|P_0 u\|_{W_2^1(R;H_1)} = \alpha\|\vartheta\|_{W_2^1(R;H_1)}
\end{aligned}$$

Так как $\alpha < 1$, то оператор $P_1 P_0^{-1}$ обратим в $W_2^1(R;H_1)$ и поэтому

$$\vartheta = \left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f,$$

а

$$u = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f.$$

Отсюда следует, что

$$\|u\|_{W_2^3(R;H_3)} \le const \|f\|_{W_2^1(R;H_1)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир, 1971, 371 с.
2. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Автореф. доктор. дисс., Баку, 1994, 32 с.
3. Gamidov E.G. On estimating intermediate first order derivative in space of smooth vector function, 2003 Proceeding of IMM NAS Azerbaijan, v. XV, p. 17-22.

HAMAR VEKTOR FUNKSİYALAR FƏZASINDA İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

E.H.HƏMİDOV

XÜLASƏ

Məqalədə butun oxda verilən iкinci tərtib elliptiк tip operator-diferensial tənliкlərin hamar veкtor-funкsiyalar fəzasında həll olunma şərtləri tapılmışdır. Bununla yanaşı aralıq törəmə operatorlarının normaları da hamar veкtor-funкsiyalar fəzasında qiymətləndirilmişdir. Bütün şərtlər operator-diferensial tənliyin əmsalları ilə ifadə olunmuşdur.

ON SOLVABILITY OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER IN THE SPACE OF SMOOTH VECTOR FUNCTION

E.G.GAMIDOV

SUMMARY

In the paper we obtain conditions solvability of elliptic type operator-differential operators of second order on the axis in the space of smooth vector-function Estimations of the norm of operators of intermediate derivatives in the space of smooth vector-function one obtained. All the conditions are expressed by the coefficients of operator.